

1 Logika, množiny a základní číselné obory

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice. Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A .

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice. Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

Definice. Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

Definice. Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

Definice. Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující podmínkou** (platnosti výroku) B .

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výroková forma V je výraz, který má konečný počet proměnných, přičemž když za tyto proměnné dosadíme prvky z daného oboru, obdržíme výrok.

Definice. Necht' V je výroková forma s jednou proměnnou.

(a) Výrok „Pro každé x platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x: V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje x takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x: V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem

———— Konec 1. přednášky, 1. 10. 2025 ————

- důkaz rozбором případů
- důkaz matematickou indukcí

1.3 Množiny

G.Cantor: „**Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku.“

Množinu definujeme výčtem prvků nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M; V(x)\}$, kde M je množina a V je výroková forma.

Definice. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$. Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. Rozdílem množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B . Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

Definice. Kartézským součinem množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n -tic

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n]; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla). Necht' X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

1.4 Relace uspořádání a zobrazení

Definice. Binární relací rozumíme libovolnou množinu uspořádaných dvojic. Pokud R je binární relace a $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b . Často v tomto případě používáme zápis $a R b$.

Pokud binární relace R splňuje $R \subset A \times B$, pak říkáme, že R je **binární relací mezi prvky množin A a B** . Pokud $A = B$, pak říkáme, že R je **binární relací na A** .

Definice. Necht' X je množina a R je relace na X . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,
- **slabě antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, x] \in R$ platí $x = y$.

Definice. Necht' R je relace na množině A . Řekneme, že R je na A

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání a pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

Definice. Necht' $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **maximálním** prvkem (**maximem**) množiny A , jestliže $x \in A$ a neexistuje $a \in A$ takové, že $x \leq a$ a $x \neq a$,
- **největším** prvkem množiny A , jestliže $x \in A$ a pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$.

Pojmy **minimální** prvek (**minimum**) množiny a **nejmenší** prvek množiny jsou definovány zřejmým způsobem.

Definice. Necht' $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A ,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A ,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

————— Konec 2. přednášky, 2. 10. 2025 —————

Definice. Necht' $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M , jestliže platí:

- G je horní závorou množiny M ,
- je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M , potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M , jestliže platí

- g je dolní závorou množiny M ,
- je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M , potom $g' \leq g$.

Věta 1.2. Necht' $\leq$ je relace uspořádání na množině X , $M \subset X$ je neprázdná množina a existuje infimum a supremum množiny M . Potom platí $\inf M \leq \sup M$.

Definice. Binární relaci F nazýváme **zobrazením**, pokud splňuje

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2: ([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Řekneme, že zobrazení F je **zobrazení z množiny A do množiny B** , jestliže platí $F \subset A \times B$.

Definice. Necht' F je zobrazení.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x; \exists y: [x, y] \in F\}.$$

Pro $x \in \mathcal{D}(F)$ označujeme jednoznačně určený prvek y splňující $[x, y] \in F$ symbolem $F(x)$.

- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{H}(F) = \{y; \exists x: [x, y] \in F\}.$$

Označení. Necht' A a B jsou množiny a F je zobrazení.

(a) Pak symbol $F: A \rightarrow B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny A do množiny B** .

(b) Pokud je $B = \mathbf{R}$, pak místo termínu zobrazení používáme termín **funkce**.

Definice. Necht' A, B jsou množiny a f je zobrazení.

- **Obrazem množiny A** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{y \in \mathcal{H}(f); \exists x \in \mathcal{D}(f) \cap A: f(x) = y\},$$

kterou značíme $f(A)$.

- **Vzorem množiny B** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{x \in \mathcal{D}(f); f(x) \in B\},$$

kterou značíme $f^{-1}(B)$.

Definice. Řekneme, že zobrazení f

- je **prosté**, jestliže platí

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f): f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

- je **na množinu B** , jestliže platí $\mathcal{H}(f) = B$,
- je **bijekcí množiny A na množinu B** , jestliže $\mathcal{D}(f) = A$ a jde o prosté zobrazení na B .

Definice. Necht' f je zobrazení a C je množina. Pak zobrazení definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C \cap \mathcal{D}(f)$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C a značíme jej $f|_C$.

Definice. Necht' f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením (složením zobrazení)** f a g , přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice. Necht' $f: A \rightarrow B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f .

Definice. Necht' A je neprázdná množina.

- (a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A . Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme **k -tým členem** této posloupnosti.
- (b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A . Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme **n -tým členem** této posloupnosti.

———— Konec 3. přednášky, 8. 10. 2025 ————

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice. (a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B , jestliže existuje bijekce A na B . Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B . Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A nemá stejnou mohutnost jako B . Značíme $A \prec B$.

Definice. Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná, nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka. Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 1.3 (Cantor–Bernstein). Necht' A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.

Věta 1.4 (Cantor). Necht' X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X .

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin).

- (a) Podmnožina spočetné množiny je spočetná.
- (b) Necht' zobrazení $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.
- (c) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.
- (d) Obraz spočetné množiny je spočetná množina.
- (e) Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

1.6 Číselné obory

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

- I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
- II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení
- III. Vlastnost suprema: *Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*

Věta 1.6. Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M .

_____ Konec 4. přednášky, 9. 10. 2025 _____

Věta 1.7. Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Věta 1.8. Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$.

Věta 1.9. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.

Definice. Množinu **komplexních čísel** $\mathbb{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Necht' $x = (a, b) \in \mathbb{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x , prvek b nazýváme **imaginární částí** x . **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\bar{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2 Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Věta 2.1 (jednoznačnost limity). Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbf{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbf{R}$. Potom platí $A = B$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbf{R} \forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že má **vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

————— Konec 5. přednášky, 15. 10. 2025 —————

Lemma 2.2. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbf{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < K\varepsilon.$$

Věta 2.3. Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$. Potom $\lim |a_n| = |A|$.

Věta 2.4. Necht' $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je $\{a_n\}$ omezená.

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

————— Konec 6. přednášky, 16. 10. 2025 —————

Věta 2.5. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.6 (aritmetika limit). Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) je-li $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Věta 2.7. Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.8 (limita a uspořádání). Necht' $A, B \in \mathbf{R}$, $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

- (a) Necht' $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.
- (b) Necht' existuje $n^* \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Věta 2.9 (o dvou strážnících). Necht' $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- (a) existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,
- (b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme minus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo minus nekonečno, říkáme, že **má nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞ , pak říkáme, že **diverguje** k ∞ . Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé). Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbf{R}^*$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí $A = B$.

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé). Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Věta 2.12. Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $b_n \neq 0$,

- $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ a $A > 0$,
- $\lim b_n = 0$,
- existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$.

Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

———— Konec 9. přednášky, 29. 10. 2025 ————

2.4 Hlubší věty o limitách

Věta 2.13. Necht' $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$.

Věta 2.14 (Bolzano–Weierstrass). Necht' $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.

———— Konec 10. přednášky, 30. 10. 2025 ————

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená.} \end{cases}$$

Věta 2.15 (limita, limes superior a limes inferior). Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbf{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Věta 2.16. Necht' $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti. Předpokládejme, že platí

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: x_n \leq y_n.$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ a $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že $A \in \mathbf{R}^*$ je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.17 (limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty). Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\limsup a_n, \liminf a_n \in H(\{a_n\})$ a pro každé $y \in H(\{a_n\})$ platí $\liminf a_n \leq y \leq \limsup a_n$.

————— Konec 11. přednášky, 5. 11. 2025 —————

Důsledek 2.18. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom je $H(\{a_n\})$ neprázdná.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu** podmínku, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.19. Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

3 Limita a spojitost funkce

3.1 Základní pojmy

Definice. Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f: M \rightarrow \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice. Funkce $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J , jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J .

Definice. **Monotónní funkce** (resp. **ryze monotónní funkce**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J .

Definice. Necht' f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M , jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

3.2 Limita funkce

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$.

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$. Potom **prstencovým okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$, kde $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(c, \varepsilon)$. **Prstencovým okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(\infty, \varepsilon)$. **Prstencovým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(-\infty, \varepsilon)$.

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^*$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^*$** , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

———— Konec 12. přednášky, 6. 11. 2025 ————

Věta 3.1 (jednoznačnost limity). Necht' funkce f má v bodě $c \in \mathbf{R}^*$ limitu $A \in \mathbf{R}^*$ a limitu $B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí $A = B$.

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$.

- **Pravým okolím** bodu c rozumíme každý interval $[c, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_+(c, \varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c - \varepsilon, c]$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_-(c, \varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_+(c, \varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c - \varepsilon, c)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_-(c, \varepsilon)$.

Definice. Pokračujme s definicí pro nevlastní hodnoty.

- **Pravým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_+(-\infty, \varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_-(\infty, \varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_+(-\infty, \varepsilon)$,

- **levým prstencovým okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_-(\infty, \varepsilon)$.

Definice. Necht' $A \in \mathbf{R}^*$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P_+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Definice. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbf{R}$, jestliže platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Definice. Řekneme, že funkce f je **spojitá zprava** (resp. **zleva**) **v bodě** $c \in \mathbf{R}$, jestliže platí $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c)$).

Definice. Necht' $J \subset \mathbf{R}$ je interval. Funkce $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J , jestliže platí:

- f je spojitá zprava v každém bodě J , který není pravým koncovým bodem J ,
- f je spojitá zleva v každém bodě J , který není levým koncovým bodem J .

3.3 Věty o limitách

Věta 3.2. Necht' funkce f má v bodě $c \in \mathbf{R}^*$ vlastní limitu. Pak existuje $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

———— Konec 13. přednášky, 13. 11. 2025 ————

Věta 3.3 (aritmetika limit). Necht' $A, B, c \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$. Potom platí:

- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Věta 3.4. Necht' $A \in \mathbf{R}^*$, $A > 0$, $c \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ a existuje $\eta \in \mathbf{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) > 0$. Potom platí $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Věta 3.5 (limita a uspořádání). Necht' $c \in \mathbf{R}^*$ a funkce f a g mají limity v c .

- Necht'

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Pak existuje $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) > g(x).$$

(b) Necht' existuje $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \leq g(x).$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Věta 3.6 (o dvou strážnících). Necht' $A \in \mathbf{R}^*, \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0$, a funkce f, g a h splňují

- $\forall x \in P(c, \eta): f(x) \leq h(x) \leq g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$.

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ a rovná se A .

————— Konec 14. přednášky, 19. 11. 2025 —————

Věta 3.7 (limita složené funkce). Necht' $x_0, y_0 \in \mathbf{R}^*, f, g$ jsou funkce, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \forall x \in P(x_0, \eta): g(x) \neq y_0$,

(S) f je spojitá v bodě y_0 .

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

Věta 3.8 (Heine). Necht' $c, A \in \mathbf{R}^*$ a f je funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující:

- $\forall n \in \mathbf{N}: x_n \neq c$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

————— Konec 15. přednášky, 20. 11. 2025 —————

Věta 3.9 (limita monotónní funkce). Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*, a < b$, f je monotónní funkce na intervalu (a, b) . Potom existují $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, přičemž platí:

(a) je-li f na (a, b) neklesající, pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup f((a, b)),$$

(b) je-li f na (a, b) nerostoucí, pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

3.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 3.10 (Bolzano). Necht' funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Lemma 3.11. Necht' $M \subset \mathbf{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \forall z \in \mathbf{R}: x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M je interval.

Věta 3.12. Necht' funkce $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá na intervalu J . Potom je $f(J)$ interval.

Věta 3.13. Necht' f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.

———— Konec 16. přednášky, 26. 11. 2025 ————

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M , jestliže platí

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M . Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M: f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M: f(y) \geq f(x)$.

Věta 3.14. Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a svého minima.

Věta 3.15 (o inverzní funkci). Necht' f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J . Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

4 Elementární funkce

Věta 4.1. Existuje právě jedna funkce $\exp: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ splňující

$$(E1) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}: \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$$

$$(E2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

———— Konec 17. přednášky, 3. 12. 2025 ————

Definice.

(a) Funkce $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci $\exp$. Nazývá se **(přirozeným) logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme funkci $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ předpisem

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu a** . V případě $a = e$ píšeme pouze $\log$ místo $\log_e$.

(c) Necht' $a \in \mathbf{R}, a > 0$, a $b \in \mathbf{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

(d) Necht' $a \in \mathbf{R}, a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x, x \in \mathbf{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

———— Konec 18. přednášky, 4. 12. 2025 ————

Věta 4.2 (základní vlastnosti sinu a kosinu). Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a právě jedna dvojice funkcí **sinus** ($\sin$) a **kosinus** ($\cos$), které mají následující vlastnosti:

(G1) pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ platí

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y),$$

(G2) pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ platí

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y),$$

(G3) $\sin$ je lichá funkce a $\cos$ je sudá funkce,

(G4) $\sin$ je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice. Funkce **tangens**, značíme ji tg , a **kotangens**, značíme ji cotg , definujeme předpisy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, & x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Definice. Cyklometrické funkce **arkussinus** ($\arcsin$), **arkuskosinus** ($\arccos$), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** ($\operatorname{arccotg}$) definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\arcsin &= \left(\sin \big|_{[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]} \right)^{-1}, \\ \arccos &= \left(\cos \big|_{[0, \pi]} \right)^{-1}, \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg} \big|_{(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)} \right)^{-1}, \\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg} \big|_{(0, \pi)} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Věta 4.3. Funkce $\log$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, tg , cotg , $\arcsin$, $\arccos$, arctg a $\operatorname{arccotg}$ jsou spojité na svých definičních oborech.

5 Derivace

5.1 Definice a základní vztahy

Definice. Necht' $a \in \mathbf{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme **derivací funkce f v bodě a** . Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce f v bodě a** předpisy

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva v bodě a derivaci zprava v bodě nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

————— Konec 19. přednášky, 10. 12. 2025 —————

Věta 5.1 (derivace a spojitost). Necht' funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.

Věta 5.2 (aritmetika derivací). Necht' $a \in \mathbf{R}$ a f, g jsou funkce, které mají v bodě a derivaci.

(a) Pak platí

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Necht' alespoň jedna z funkcí f a g je spojitá v bodě a . Potom platí

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) Necht' funkce g je spojitá v bodě a . Potom platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.3 (derivace složené funkce). Necht' funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$, má v tomto bodě derivaci a funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce). Necht' a je vnitřním bodem intervalu I a f je spojitá a ryze monotónní funkce na I . Označme $b = f(a)$.

(a) Necht' $f'(a)$ existuje a je nenulová. Potom platí

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(Pokud $f'(a) = \infty$ nebo $f'(a) = -\infty$, pak platí $(f^{-1})'(b) = 0$.)

(b) Necht' $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I . Potom platí $(f^{-1})'(b) = \infty$.

(c) Necht' $f'(a) = 0$ a f je klesající na I . Potom platí $(f^{-1})'(b) = -\infty$.

————— Konec 20. přednášky, 11. 12. 2025 —————

Věta 5.5 (nutná podmínka lokálního extrému). Necht' f je reálná funkce. Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f , potom buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle). Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) , pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

———— Konec 21. přednášky, 17. 12. 2025 ————

Věta 5.7 (Lagrange). Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 5.8 (Cauchy). Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f a g jsou funkce spojitě na intervalu $[a, b]$, f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 5.9 (l'Hospitalovo pravidlo). Necht' $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce, existuje

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a platí buď

(a) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, nebo

(b) $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = \infty$.

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 5.10 (vztah derivace a monotonie). Necht' f je spojitá funkce na intervalu J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\text{int } J$) existuje derivace f .

(i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je rostoucí na J .

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je klesající na J .

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je neklesající na J .

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je nerostoucí na J .

Věta 5.11. Necht' f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Definice. Necht' $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n -tou derivaci na okolí bodu a . Pak $(n + 1)$ -ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

———— Konec 22. přednášky, 18. 12. 2025 ————

Věta 5.12. Necht' $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$). Potom f má v a ostré lokální minimum (resp. lokální maximum).

5.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice. Necht' I je interval, f je funkce a $I \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Lemma 5.13 (ekvivalentní podmínky pro konvexitu). Necht' $I \subset \mathbf{R}$ je interval a $f: I \rightarrow \mathbf{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

- (i) f je konvexní na I ,

(ii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$

(iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$

(iv) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$

Obdobné charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.